TOPLEM '71

AANVULLENDE CURSUS

ALGEMENE TOPOLOGIE

P.W.H. LEMMENS

Mathematisch Instituut
der Rijksuniversiteit
te Utrecht

INHOUD

INLEIDING

In het college Analyse II hebt U kennis gemaakt met de metrische ruimten, en met de topologie die door een metriek geïnduceerd wordt. Met behulp van ε-omgevingen werden open verzamelingen gedefinieerd.
In dit college zullen we uitgaan van een willekeurige verzameling X. In X wijzen we een collectie $\mathcal{T}$ van deelverzamelingen aan die we de open deelverzamelingen van X zullen noemen. Onder zekere voorwaarden heet $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.
Alhoewel dit niets te maken heeft met metrische ruimten, zult U toch merken dat vele stellingen uit Analyse II ook geldig zijn in dit algemene geval, mits men de termen "ε-omgeving" en "bolomgeving" vervangt door "omgeving" zonder meer. U zult echter ook attent gemaakt worden op uitzonderingen op deze regel.

Onmisbaar bij de bestudering van dit dictaat is het collegediktaat Analyse II.

Aanbevolen literatuur:

J.G. Hocking & G.S. Young: Topology.
Uitgever: Addison-Wesley Publishing Company.

Hoofdstuk I. Topologische ruimten.

Zij X een verzameling. In X wijzen we zekere deelverzamelingen aan die we open zullen noemen.

(1.1) Definitie. De collectie $\mathcal{T}$ van open deelverzamelingen van X heet een topologie op X als aan de volgende eisen voldaan is:

a) X is open en ϕ is open.

b) De doorsnede van eindig veel open verzamelingen is open.

c) De vereniging van willekeurig veel open verzamelingen is open.

Als aan deze eisen voldaan is zeggen we

X is een ruimte met topologie $\mathcal{T}$

of: $(X,\mathcal{T})$ is een topologische ruimte.

Soms, wanneer we niet geïnteresseerd zijn in de expliciete kennis van $\mathcal{T}$ zeggen we (slordig!) eenvoudig: X is een topologische ruimte.

Voor een topologische ruimte X leggen we de volgende begrippen vast.

(1.2) Zij $x \in X$. Een verzameling $U \subset X$ die x bevat, heet een omgeving van x als er een open verzameling $V \subset X$ is met $x \in V \subset U$.

(1.3) Zij $A \subset X$. Een punt $x \in X$ heet verdichtingspunt van A, als iedere omgeving van x een punt $a \in A$ bevat met $a \neq x$.

(1.4) De afsluiting $\bar{A}$ van A wordt gevormd door de vereniging van A en de verzameling van de verdichtingspunten van A.

(1.5) Een verzameling $A \subset X$ heet gesloten als zijn complement A^* $(\doteq \complement A = X \setminus A)$ open is.

Zo voortgaande kunnen we ook begrippen als inwendige, rand en geïsoleerd punt definiëren. We laten dit echter over aan de lezer! (Vergelijk met Analyse II).

(1.6) <u>Opgave</u>. $X = \mathbb{R}$ en $\mathcal{T}$ bestaat uit ϕ, $\mathbb{R}$, en uit alle deelverzamelingen van de vorm (a, ∞). Laat zien dat $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is, en bepaal de verdichtingspunten van $(0,1)$.

(1.7) <u>Opgave</u>. $X = \mathbb{R}$ en $\mathcal{T}$ bestaat uit ϕ, $\mathbb{R}$, en uit alle deelverzamelingen van de vorm $[a, \infty)$. Laat zien dat $(X, \mathcal{T})$ <u>geen</u> topologische ruimte is.

(1.8) <u>Opgave</u>. $X = \{1, 2, 3, 4\}$. $\mathcal{T}$ bestaat uit ϕ, $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{2\}$, $\{4\}$ en alle verenigingen daarvan. Welke deelverzamelingen van X zijn gesloten? Bepaal de afsluiting van $\{2\}$ en van $\{4\}$.

(1.9) <u>Opgave</u>. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat een omgeving van een verdichtingspunt van A niet noodzakelijk oneindig veel punten van A hoeft te bevatten.

(1.10) <u>Opgave</u>. $X = \{1, 2, 3\}$. Bepaal alle topologieën op X waarin $\{1, 2\}$ en $\{2, 3\}$ open zijn.

(1.11) <u>Opgave</u>. X is een topologische ruimte. Bewijs: $A \subset X$ is gesloten $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

In opgave (1.8) hebben we reeds gezien dat het niet nodig is om alle open verzamelingen van een topologie op te schrijven. In plaats daarvan kan men volstaan met het geven van een basis van open verzamelingen.

(1.12) <u>Definitie</u>. Zij $\mathcal{T}$ een topologie op X. Een deelcollectie $\mathcal{B}$ van $\mathcal{T}$ heet een <u>basis</u> voor de topologie $\mathcal{T}$ als ieder ele-

ment $\neq \phi$ van $\mathcal{T}$ een vereniging is van (eventueel willekeurig veel) elementen van $\mathcal{B}$.

(1.13) Opgave. Zij $\mathcal{B}$ een basis voor de topologie $\mathcal{T}$. Toon aan:
$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow U = \phi$ of bij ieder punt $p \in U$ is een $B \in \mathcal{B}$ met $p \in B \subset U$.

Uit opgave (1.13) blijkt dat we door het geven van een basis op eenduidige manier de hele topologie kunnen vinden. Echter niet iedere collectie deelverzamelingen kan optreden als basis voor een topologie. De volgende stelling geeft hierover uitsluitsel.

(1.14) Stelling. Een collectie $\mathcal{B}$ van deelverzamelingen van X treedt op als basis voor een topologie op X dan en alleen dan als aan de volgende voorwaarden voldaan is:

1) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$
2) Als $U, V \in \mathcal{B}$ en $U \cap V \neq \phi$ dan is er bij ieder punt $p \in U \cap V$ een element $W \in \mathcal{B}$ zodat $p \in W \subset U \cap V$.

Bewijs. Zij $\mathcal{T}$ gedefinieerd zoals in opgave (1.13). We moeten aantonen dat deze $\mathcal{T}$ een topologie op X vormt. Dan moet voldaan zijn aan de voorwaarden van def. (1.1). Het "alleen dan" is dus duidelijk wegens de eisen a) en b) van (1.1). Nu nog het "dan":
eis a) is vervuld wegens 1) en de definitie van $\mathcal{T}$.
eis b) Het is voldoende aan te tonen:
$T, S \in \mathcal{T} \Rightarrow T \cap S \in \mathcal{T}$. Zij $p \in T \cap S$ dus $p \in T$ en $p \in S$. Per definitie zijn er dan $U, V \in \mathcal{B}$ zodat $p \in U \subset T$ en $p \in V \subset S$. Volgens 2) is een $W \in \mathcal{B}$ zodat $p \in W \subset U \cap V \subset T \cap S$. Dus $T \cap S \in \mathcal{T}$.
eis c) is evident waar.

Soms wil men alle moeilijkheden van bovenstaande aard vermijden. In plaats van een basis voor de topologie geeft men dan een subbasis van open verzamelingen.

(1.15) Definitie. Zij $\mathcal{T}$ een topologie op X. Een deelcollectie $\mathcal{S}$ van $\mathcal{T}$ heet een subbasis voor de topologie als de collectie van de eindige doorsneden van elementen uit $\mathcal{S}$ een basis voor $\mathcal{T}$ vormt.

(1.16) Opgave. Zij $\mathcal{S}$ een subbasis voor de topologie $\mathcal{T}$. Toon aan: $U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow U = \phi$ of bij ieder punt $p \in U$ zijn er eindig veel elementen $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ zodat $p \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset U$.

Uit opg. (1.16) blijkt weer dat een topologie eenduidig bepaald is door een subbasis daarvan. Het grote voordeel van het begrip subbasis blijkt uit de volgende stelling, waarvan we het bewijs aan de lezer overlaten.

(1.17) Stelling. Een collectie $\mathcal{S}$ van deelverzamelingen van X treedt op als subbasis voor een topologie op X $\Leftrightarrow X = \bigcup_{S \in \mathcal{S}} S$.

(1.18) Definitie. Laat op X twee topologieën $\mathcal{T}_1$ en $\mathcal{T}_2$ gegeven zijn. $\mathcal{T}_1$ heet fijner dan $\mathcal{T}_2$ (of $\mathcal{T}_2$ grover dan $\mathcal{T}_1$) als $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$.

(1.19) Gegeven een collectie topologieën $\mathcal{T}_\gamma$ (γ doorloopt een indexverzameling Γ) op X. De grofste topologie $\mathcal{T}$ die fijner is dan iedere $\mathcal{T}_\gamma$ heet de gemeenschappelijke verfijning van de topologieën $\mathcal{T}_\gamma$. De fijnste topologie $\mathcal{T}$ die grover is dan iedere $\mathcal{T}_\gamma$ heet de gemeenschappelijke vergroving van de topologieën $\mathcal{T}_\gamma$.

(1.20) <u>Opgave</u>. Zij (X, ρ) een metrische ruimte. Laat zien dat de open ε-bollen een basis vormen voor de topologie bepaald door de metriek ρ.

(1.21) <u>Opgave</u>. In $\mathbb{R}^2$ bekijken we de topologie bepaald door de metriek

$$\rho((x,y),(x',y')) = \max(|x-x'|,|y-y'|).$$

Laat zien dat de collectie $\mathcal{S}$ bestaande uit alle halfvlakken van de vorm $x > a$, $x < a$, $y > a$, $y < a$ $(a \in \mathbb{R})$ een subbasis is voor deze topologie.

(1.22) <u>Opgave</u>. $X = \mathbb{R}$. Laat zien dat de collectie $B_{r,n} = (r-\frac{1}{n}, r+\frac{1}{n})$ met $r \in \mathbb{Q}$ en $n \in \mathbb{N}$ een basis is voor de gewone topologie op X.

(1.23) <u>Opgave</u>. Zie (1.10). Voor welke topologie op $\{1, 2, 3\}$ vormt $\{\{1,2\},\{2,3\}\}$ een subbasis.

(1.24) <u>Opgave</u>. Op X zijn twee topologieën gegeven: $\mathcal{T}_1$ met <u>basis</u> $\mathcal{B}$ en $\mathcal{T}_2$ met <u>subbasis</u> $\mathcal{S}$. Bewijs: $\mathcal{T}_1$ is fijner dan $\mathcal{T}_2$ $\Leftrightarrow$ bij iedere $U \in \mathcal{S}$ en elk punt $p \in U$ is er een $V \in \mathcal{B}$ zodat $p \in V \subset U$.

(1.25) <u>Opgave</u>. Zij $\mathcal{T}$ een topologie. Kunnen we, om een grovere topologie te krijgen zomaar wat elementen uit $\mathcal{T}$ weglaten? Illustreer dit met een voorbeeld!

(1.26) <u>Opgave</u>. Gegeven een collectie topologieën $\mathcal{T}_\gamma$ $(\gamma \in \Gamma)$. Laat zien dat $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{T}_\gamma$ een subbasis is voor de gemeenschappelijke verfijning van de $\mathcal{T}_\gamma$'s, en dat de gemeenschappelijke vergroving $\mathcal{T}$ van de $\mathcal{T}_\gamma$'s gegeven wordt door $\mathcal{T} = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{T}_\gamma$.

(1.27) <u>Opgave</u>. Zij X een topologische ruimte met topologie $\mathcal{T}$. Zij verder $\mathcal{B}$ een basis voor $\mathcal{T}$ en $\mathcal{S}$ een subbasis voor $\mathcal{T}$. Een <u>basisom-</u>

<u>geving</u> van $x \in X$ is een $U \in \mathcal{B}$ zodat $x \in U$. Een $U \in \mathcal{S}$ met $x \in U$ heet een <u>subbasis-omgeving</u> van x. Zij A een deelverzameling van X. Toon aan dat we ons in definitie (1.3) kunnen beperken tot basis-omgevingen van x, maar niet tot subbasis-omgevingen. Construeer voor dit laatste een tegenvoorbeeld, bijv. met behulp van opgave (1.21).

(1.28) <u>Opmerking</u>. Bij de definities van basis en subbasis hebben we geen minimaliteitscondities opgelegd. Dus een collectie open verzamelingen die een basis omvat is zelf weer een basis, en iedere basis is ook een subbasis.

Volgens definitie (1.2) hoeft een omgeving van x geen open verzameling te zijn. Wel is iedere open verzameling die x bevat een omgeving van x. Daarentegen zijn basis- en subbasis-omgevingen uiteraard steeds open.

Gemakkelijk te verifiëren is de uitspraak:

Een verzameling V is een omgeving van x $\Leftrightarrow$ V omvat een basisomgeving van x.

Hoofdstuk II. Continue afbeeldingen.

X en Y zijn topologische ruimten.

(2.1) Definitie. Een afbeelding $f : X \to Y$ heet continu als voor iedere open $A \subset Y$ geldt dat $f^{-1}(A)$ open is in X.

(2.2) Opgave. Bewijs: $f : X \to Y$ is continu $\Leftrightarrow$ Voor iedere gesloten verzameling $B \subset Y$ is $f^{-1}(B)$ gesloten in X.

(2.3) Opgave. Zij $\mathcal{S}$ een subbasis voor de topologie op Y. Bewijs: $f : X \to Y$ is continu $\Leftrightarrow$ Voor ieder element $S \in \mathcal{S}$ is $f^{-1}(S)$ open in X.

(2.4) Definitie. Een afbeelding $f : X \to Y$ heet continu in het punt $x \in X$ als er bij iedere omgeving V van $f(x)$ een omgeving U van x te vinden is zodat $f(U) \subset V$.

(2.5) Opgave. Laat zien $f : X \to Y$ is continu $\Leftrightarrow$ f is continu in elk punt van X.

(2.6) Opmerking. Aan het eind van dit hoofdstuk zullen we aan de hand van een voorbeeld laten zien dat rij-continuïteit (Analyse II, 5.11.b) niet equivalent is met definitie (2.4). Natuurlijk geldt de equivalentie wel voor metrische ruimten.

(2.7) Definitie. Een afbeelding $f : X \to Y$ heet een open afbeelding als voor iedere open $A \subset X$ ook $f(A) \subset Y$ open is.
f heet een gesloten afbeelding als voor iedere gesloten $B \subset X$ ook $f(B) \subset Y$ gesloten is.

(2.8) Definitie. Een afbeelding $f : X \to Y$ heet een homeomorfisme als
1. f is een bijectie,
2. f en f^{-1} zijn continu.

(2.9) Opgave. $f : X \to Y$ is een bijectie. Bewijs: f is een homeomorfisme $\Leftrightarrow$ f en f^{-1} zijn open afbeeldingen.

Zij A een verzameling, en B een topologische ruimte. Zij verder $f : A \to B$ een afbeelding. We vragen ons nu af: Voor welke topologieën op A is f een continue afbeelding? Volgens definitie (2.1) is nodig en voldoende hiervoor dat $f^{-1}(V)$ open is in A voor iedere open deelverzameling V van B. We vinden dus

(2.10) Stelling. Zij $(B,\mathcal{V})$ een topologische ruimte. De grofste topologie op A zodat $f : A \to B$ continu is, wordt gegeven door de collectie $\{f^{-1}(V)\}_{V \in \mathcal{V}}$.

(2.11) Opgave. Laat zien dat de collectie $\{f^{-1}(V)\}_{V \in \mathcal{V}}$ inderdaad een topologie op A definieert.

We kunnen de zaak ook van de andere kant bekijken, en veronderstellen dat juist A een topologische ruimte is en B een verzameling. De vraag is dan, voor welke topologieën op B een gegeven afbeelding $f : A \to B$ continu is. Gebruiken we weer de eenvoudige karakterisering van definitie (2.1), dan vinden we

(2.12) Stelling. Zij $(A,\mathcal{U})$ een topologische ruimte. De fijnste topologie op B zodat $f : A \to B$ continu is, wordt gegeven door de collectie

$$\{V \mid V \subset B \ \& \ f^{-1}(V) \in \mathcal{U}\} .$$

(2.13) Opgave. Laat weer zien dat de collectie uit stelling (2.12) inderdaad een topologie op B is.

Opmerking. Zowel in het geval van stelling (2.10) als ook bij stelling (2.12) spreekt men van de door f geïnduceerde topologie.

Daarbij maakt men dan een onderscheid:
De topologie op A in (2.10) heet initiale topologie;
De topologie op B in (2.12) heet finale topologie, of ook wel quotient- of identificatietopologie.

(2.14) Voorbeeld. Zij X een topologische ruimte met topologie $\mathcal{T}$, en zij A een deelverzameling van X. Van A kunnen we een topologische ruimte maken, door A te voorzien van de door $\mathcal{T}$ op A geïnduceerde topologie. D.w.z. een deelverzameling B van A heet precies dan open in A als er een open $U \subset X$ (dus $U \in \mathcal{T}$) is, zodat $B = A \cap U$. (Vergelijk dit met Analyse II, stelling 4.22). Zij $i : A \rightarrow X$ de identieke afbeelding (inclusie). Dan is de door $\mathcal{T}$ op A geïnduceerde topologie precies de door i geïnduceerde topologie volgens stelling (2.10). Immers, zij $U \subset X$ open, dan is $i^{-1}(U) = A \cap U$.

(2.15) Voorbeeld. X_γ , $\gamma \in \Gamma$ is een collectie topologische ruimten. Bekijk nu het cartesisch produkt $\mathbf{X} = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. Is er een zinvolle manier om X van een topologie te voorzien? Hiertoe merken we op dat er voor iedere $\beta \in \Gamma$ een projektie-afbeelding $\pi_\beta : X \rightarrow X_\beta$ bestaat (π_β voegt aan een element van X zijn β-de coördinaat toe). We voorzien X nu van de grofste topologie $\mathcal{T}$ waarvoor iedere π_β een continue afbeelding wordt. Voor iedere afzonderlijke $\beta \in \Gamma$ induceert π_β een topologie $\mathcal{T}_\beta$ op X volgens stelling (2.10). Blijkbaar is $\mathcal{T}$ de gemeenschappelijke verfijning van de topologieën $\mathcal{T}_\beta$ $(\beta \in \Gamma)$.

(2.16) Opgave. Zie voorbeeld (2.15). Laat zien dat een basis voor de topologie $\mathcal{T}$ op X gegeven wordt door de collectie deelverzame-

lingen van X van de vorm $U = \prod_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, waarbij iedere U_γ open is in X_γ en bovendien $U_\gamma = X_\gamma$, op eindig veel uitzonderingen γ na.
Aanwijzing: Hoe ziet een open verzameling van X in de topologie Γ_β eruit? Gebruik verder nog opgave (1.26).
De topologie $\mathcal{T}$ op ΠX_γ in voorbeeld (2.15) heet de Tychonoff-topologie. Opgave (2.16) suggereert nog een andere "natuurlijke" manier om ΠX_γ van een topologie te voorzien. Deze topologie, die we de fijne produkttopologie zullen noemen, heeft als basis de collectie deelverzamelingen van de vorm $U = \prod_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$, waarbij iedere U_γ open is in X_γ. Merk het verschil op met de basis voor de Tychonoff-topologie.
Uit de definities blijkt:

1) Als de indexverzameling Γ eindig is, dan vallen de Tychonoff-topologie en de fijne produkttopologie samen.
2) Als Γ oneindig is dan is de Tychonoff-topologie in het algemeen echt grover dan de fijne produkttopologie.

(2.17) Opgave. Gegeven $f : A \to B$, B een topologische ruimte, en A voorzien van de door f geïnduceerde topologie. Bewijs:
Voor iedere topologische ruimte Y en iedere afbeelding $g : Y \to A$ geldt:

$$g \text{ continu} \Leftrightarrow f\circ g : Y \to B \text{ continu}.$$

(2.18) Opgave. Gegeven $f : A \to B$, A een topologische ruimte en B voorzien van de door f geïnduceerde topologie. Bewijs:
Voor iedere topologische ruimte Y en iedere afbeelding $g : B \to Y$ geldt:

$$g \text{ continu} \Leftrightarrow g\circ f : A \to Y \text{ continu}.$$

(2.19) Opgave. Zij $X = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ als in voorbeeld (2.15) voorzien van de Tychonoff-topologie. Laat zien: Voor iedere topologische ruimte Y en iedere afbeelding $f : Y \to X$ geldt:

$$f \text{ continu} \Leftrightarrow \pi_\beta \circ f : Y \to X_\beta \text{ continu voor alle } \beta \in \Gamma.$$

(2.20) Opgave. Zij $\mathbb{R}$ voorzien van de gewone topologie. Laat zien dat de gebruikelijke topologie op $\mathbb{R}^2$ overeenstemt met de Tychonoff-topologie op $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

We geven nu het in opmerking (2.6) beloofde voorbeeld. We zoeken dus topologische ruimten X en Y en een afbeelding $f : X \to Y$ die in een punt $a \in X$ niet continu is, terwijl toch voor iedere rij (a_n) in X mèt limiet a de rij $(f(a_n))$ in Y het punt f(a) als limiet heeft. Daartoe definiëren we eerst het begrip limiet.

(2.21) Definitie. Z is een topologische ruimte en (z_n) is een rij punten in Z. Een punt $z \in Z$ heet een limiet van de rij (z_n) als er bij iedere omgeving U van z een $N \in \mathbb{N}$ te vinden is zodat $z_n \in U$ zodra $n \geq N$.

(2.22) Voorbeeld bij (2.6). Zij X de topologische ruimte die er als volgt uitziet. De punten van X zijn de reële getallen ≥ 1 en ook nog een punt, ∞ genaamd. Iedere deelverzameling van X die het punt ∞ niet bevat is open; en een deelverzameling A van X die ∞ bevat, is open $\Leftrightarrow X \setminus A$ bevat hoogstens aftelbaar veel punten. Ga zelf na dat dit inderdaad een topologie op X definieert.
Voor Y nemen we het segment [0,1] met de gewone topologie.
Bekijk nu de afbeelding $f : X \to Y$ gegeven door

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ als } x \in X,\ x \neq \infty$$
$$f(\infty) = 0.$$

Ga na dat f niet continu is in het punt $\infty \in X$. Laat in X een rij punten (a_n) gegeven zijn met limiet ∞. Ik beweer: dan is er een $N \in \mathbb{N}$ zodat $a_n = \infty$ vóór alle $n \geq N$. Immers $U = \{X \setminus \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\} \cup \{\infty\}$ is een omgeving van ∞ (ga na!) en dus geldt: $a_n \in U \Leftrightarrow a_n = \infty$. Maar dan heeft de rij $(f(a_n))$ zeker 0 als limiet. •

(2.23) Opgave. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat een rij in een topologische ruimte wel eens meer dan één limiet kan hebben.

Hoofdstuk III. Continue invarianten.

(3.1) Definitie. Een open overdekking van een topologische ruimte X is een collectie open deelverzamelingen van X, waarvan de vereniging X is.
Een open overdekking heet eindig als hij uit eindig veel open deelverzamelingen bestaat.

(3.2) Definitie. Een topologische ruimte X heet compact als iedere open overdekking van X een eindige open overdekking van X bevat.
Een deelverzameling $A \subset X$ heet compact wanneer A als topologische ruimte (geïnduceerde topologie) compact is.

In een metrische ruimte is elke compacte deelverzameling gesloten (zie Analyse II, (7.15)). Dat dit in het algemeen niet waar is, blijkt uit de volgende opgave.

(3.3) Opgave. $(X,\mathcal{T})$ als in opgave (1.6). Laat zien dat $[a,\infty)$ compact is in X, en dat $[a,\infty)$ noch open, noch gesloten is.

(3.4) Opgave. Een gesloten deelverzameling A van een compacte topologische ruimte X is compact in X. Bewijs dit.
Aanwijzing: formuleer de compactheid van A eerst in termen van open deelverzamelingen van X.

(3.5) Opgave. X is een topologische ruimte. Bewijs: als $a \in X$ een limiet is van een rij (a_n) in X, dan is de verzameling
$A = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ compact in X.
(Vergelijk dit met Analyse II, (7.13)).

Het begrip compactheid kan ook gedefinieerd worden met gesloten verzamelingen. Zie hiervoor Analyse II, (7.9).

(3.6) Definitie. Een topologische ruimte X heet aftelbaar compact als iedere oneindige deelverzameling van X een verdichtingspunt (in X) heeft.

(3.7) Stelling. Een compacte topologische ruimte is aftelbaar compact.

Voor het bewijs verwijzen we naar Analyse II, stelling (7.21). Ga zelf na welke modificaties nodig zijn omdat U niet te maken hebt met metrische ruimten.

(3.8) Opmerking. Een aftelbaar compacte metrische ruimte is compact. Voor niet metrische ruimten hoeft dit echter niet waar te zijn. Zie Hoofdstuk VI. Zie ook opgave (1.6).

(3.9) Definitie. Een eigenschap van een topologische ruimte X heet een continue invariant als voor iedere continue afbeelding van X op een topologische ruimte Y, ook Y die eigenschap heeft.

(3.10) Stelling. Compactheid is een continue invariant.

Voor het bewijs van deze stelling verwijzen we naar stelling (7.14) in Analyse II.

(3.11) Opmerking. Het begrip "aftelbaar compact" is geen continue invariant. We kunnen dit inzien aan de hand van het volgende voorbeeld. Neem $X = \mathbb{N}$, met als basis voor de topologie alle deelverzamelingen van de vorm $\{2n-1,2n\}$. Zij $Y = \mathbb{N}$, voorzien van de discrete topologie (elk punt is open). Ga zelf na dat
(1) X is aftelbaar compact.
(2) Y is niet aftelbaar compact.

(3) De afbeelding $f : X \to Y$, gegeven door $f(x) =]\frac{x}{2}[$, is een continue afbeelding van X op Y. Hierbij betekent]a[het kleinste gehele getal $\geq a$.

Voor de volledigheid zij hier nog vermeld dat de aftelbare compactheid wel een continue invariant is, indien we uitsluitend met T_1-ruimten werken (zie Definitie (4.1)b en opgave (6.11)).

(3.12) Definitie. Een open en gesloten deelverzameling van een topologische ruimte X heet een brok van X.

Dus $A \subset X$ is een brok $\Leftrightarrow$ A en $X \setminus A$ zijn open. De lege verzameling en X zelf zijn altijd brokken. Eindige doorsneden en ook eindige verenigingen van brokken zijn weer brokken. (Waarom mag hier niet "oneindig" staan?) Ook het complement van een brok is weer een brok.

(3.13) Opgave. $X = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Door de metriek $\rho(x,y) = |x-y|$ wordt X een metrische ruimte. Bepaal alle brokken van X.

(3.14) Opgave. Y is een topologische ruimte en X is een deelverzameling van Y, voorzien van de geïnduceerde topologie. Zoals U weet, gelden de volgende uitspraken:

$A \subset X$ open in X $\Leftrightarrow$ er is een open $U \subset Y$ zodat $A = U \cap X$.

$B \subset X$ gesloten in X $\Leftrightarrow$ er is een gesloten $V \subset Y$ zodat $B = V \cap X$.

Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat de volgende uitspraak niet waar hoeft te zijn:

$A \subset X$ een brok van X $\Leftrightarrow$ er is een brok $U \subset Y$ zodat $A = U \cap X$.

Bewijs verder dat "$\Leftarrow$" wel waar is.

(3.15) <u>Opgave</u>. $X \subset Y$ als in opgave (3.14). Bewijs: $A \subset X$ is een brok in $X \Leftrightarrow$ er zijn open $U, V \subset Y$ zodat $U \cap X = A$ en $V \cap X = X \setminus A$. Kunnen U en V zo gekozen worden dat $U \cap V = \phi$? Geef een voorbeeld!

(3.16) <u>Definitie</u>. Een topologische ruimte X heet <u>samenhangend</u> als X geen echte brokken heeft. Dus als ϕ en X de enige brokken van X zijn.
$A \subset X$ heet samenhangend wanneer A samenhangend is in de geïnduceerde topologie.

(3.17) <u>Opgave</u>. Bewijs met behulp van opgave (3.15):
Een deelverzameling A van een topologische ruimte X is <u>niet samenhangend</u> $\Leftrightarrow$ er zijn open $U, V \subset X$ zodat $U \cap V \cap A = \phi$, $A \subset U \cup V$, $U \cap A \neq \phi$ en $V \cap A \neq \phi$.

(3.18) <u>Opgave</u>. Y is een topologische ruimte, $D \subset Y$ is samenhangend en $A \subset Y$ is een brok. Laat zien: $D \subset A$ òf $D \cap A = \phi$.

(3.19) <u>Stelling</u>. X is een topologische ruimte. Dan geldt: Als $A \subset X$ samenhangend is, dan is ook $\bar{A}$ (afsluiting) samenhangend.

<u>Bewijs</u>. Zij $D \subset \bar{A}$ een brok van $\bar{A}$ zodat $D \neq \phi$. Dan is $D \cap A$ een brok van A en $D \cap A \neq \phi$ (ga na!), dus $D \cap A = A$. Omdat $\bar{A}$ gesloten is in X, en D gesloten in $\bar{A}$, is D gesloten in X. Omdat $A \subset D \subset \bar{A}$, geldt in X : $\bar{A} \subset D = \bar{D} \subset \bar{\bar{A}} = \bar{A}$, dus $D = \bar{A}$.

(3.20) <u>Opgave</u>. Bewijs stelling (3.19) met behulp van opgave (3.17).

(3.21) <u>Definitie</u>. Zij x een punt van een topologische ruimte X. De vereniging van alle samenhangende deelverzamelingen van

X <u>die het punt x bevatten</u>, heet de(samenhangs)<u>component</u> van x.

(3.22) <u>Stelling</u>. Voor de samenhangscomponent C van $x \in X$ geldt:

a) C is samenhangend

b) C is gesloten.

<u>Bewijs</u>.

a) Zij B een brok van C zodat $x \in B$. Voor iedere samenhangende deelverzameling D van X met $x \in D$ is dan $B \cap D$ een brok van D dat niet leeg is, dus $B \cap D = D$ en bijgevolg $B \supset D$, dus $B = C$. Voor een brok B' van C dat x niet bevat, gaan we over op het brok $C \setminus B'$. Dit bevat x wel, dus $C \setminus B' = C$, en hieruit volgt $B' = \phi$.

b) Volgt onmiddellijk uit stelling (3.19) en uit de definitie van C.

Zij x een punt van een topologische ruimte X. Ieder brok B van X dat x bevat, omvat de samenhangscomponent van x. (Zie opgave (3.18)). Dus de samenhangscomponent van x is een deelverzameling van de doorsnede van alle brokken die x bevatten (de z.g. <u>quasicomponent</u> van x).

(3.23). <u>Voorbeeld</u>. In $\mathbb{R}^2$ (gewone, metrische topologie) beschouwen we de verzameling

$$A = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{m},\ m \in \mathbb{N}\} \cup \{(x,0) \mid x \neq 0\}$$

(tekening!) voorzien van de geïnduceerde topologie. <u>In A</u> geldt dan: De quasicomponent van het punt (1,0) is de verzameling $\{(x,0) \mid x \neq 0\}$, terwijl de component van (1,0) gegeven wordt door $\{(x,0) \mid x > 0\}$. Ga na!

(3.24) Stelling. Het begrip samenhang is een continue invariant.

Zie voor een bewijs: Analyse II, stelling (7.7).

Een ander belangrijk begrip in dit verband is de boogsamenhang (samenhang met wegen). We zullen dit nu gaan definiëren en enkele eigenschappen aantonen. Zij I het segment $[0,1]$ in de reële getallen met de gewone topologie.

(3.25) Definitie. Een weg (of boog) in een topologische ruimte X is een continue afbeelding $f : I \to X$. Als $f(0) = a$ en $f(1) = b$, dan spreken we van een weg van a naar b.

(3.26) Stelling. In een topologische ruimte X is de relatie R gegeven door "$xRy \Leftrightarrow$ er is een weg van x naar y", een equivalentie-relatie.

Bewijs.

1. Symmetrisch. Als $f : I \to X$ een continue afbeelding is met $f(0) = x$ en $f(1) = y$, dan is $f' : I \to X$, gedefinieerd door $f'(t) = f(1-t)$ $(t \in I)$ een weg van y naar x.
2. Reflexief. De weg $h : I \to X$ met $h(t) \equiv x$ voor alle $t \in I$, is een weg van x naar x.
3. Transitief. Gegeven $f, g : I \to X$ met $f(0) = x$, $f(1) = g(0) = y$ en $g(1) = z$. Bekijk dan $k : I \to X$, gegeven door

   $k(t) = f(2t)$ als $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ en $k(t) = g(2t-1)$ als $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

   k is een weg van x naar z.

(3.27) Opgave. Verifieer dat de afbeeldingen f', h en k uit het bewijs van stelling (3.26) inderdaad continu zijn.

(3.28) Definitie. Een deelverzameling A van een topologische ruimte X heet boogsamenhangend als er bij ieder tweetal punten a, b $\in$ A een weg van a naar b bestaat die geheel binnen A verloopt. (d.w.z. er is een continue $f : I \to X$ zodat $f(0) = a$, $f(1) = b$ en $f(I) \subset A$).

(3.29) Opgave. Laat zien : In $\mathbb{R}^n$ met de gebruikelijke metriek is een bolomgeving boogsamenhangend.

(3.30) Opgave. A en B zijn boogsamenhangende deelverzamelingen van een topologische ruimte X. Bewijs $A \cap B \neq \phi \Rightarrow A \cup B$ is boogsamenhangend.

(3.31) Stelling. Een boogsamenhangende deelverzameling A van een topologische ruimte X is samenhangend.

Bewijs. Uit het ongerijmde. Stel A is niet samenhangend. Dan zijn er open $U, V \subset X$ zodat $A \subset U \cup V$, $A \cap U \cap V = \phi$, $A \cap U \neq \phi$ en $A \cap V \neq \phi$. Er zijn dus punten a, b $\in$ A met $a \in U$, $b \in V$.
Zij nu $f : I \to X$ een weg van a naar b die geheel binnen A verloopt. Dan geldt $f(I) \subset U \cup V$, $f(I) \cap U \cap V = \phi$, $f(I) \cap U \neq \phi$ en $f(I) \cap V \neq \phi$. Dit betekent dat f(I) niet samenhangend is, hetgeen strijdig is met de samenhang van I en de continuïteit van f (zie (3.24)).

De omkering van stelling (3.31) is in het algemeen niet juist, getuige het volgende voorbeeld.

(3.32) Voorbeeld. In $\mathbb{R}^2$ met de gewone topologie bekijken we de deelverzameling A, gegeven door

$$A = \{(x,y) \mid y = \sin \frac{1}{x} , x > 0\} \cup \{(0,0)\} .$$

Dan is A samenhangend. Immers, $A\backslash\{(0,0)\}$ is samenhangend omdat dit het beeld is van de samenhangende halfrecht $(0,\infty)$ onder de continue afbeelding $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $f(x) =$ $= (x, \sin \frac{1}{x})$. Bovendien is het punt $(0,0)$ verdichtingspunt van $A\backslash\{(0,0)\}$. Met een soortgelijke redenering als in het bewijs van stelling (3.19) toont men aan dat A samenhangend is.

A is echter niet boogsamenhangend, want het punt $(0,0)$ is binnen A met geen ander punt van A te verbinden. In concreto zullen we aantonen dat voor een continue afbeelding $f : I \to X$ zodat $f(I) \subset A$ en $f(0) = (0,0)$ geldt dat $f(I) = \{(0,0)\}$.

Bekijk daartoe de omgeving

$$U = \{(x,y) \mid -\tfrac{1}{2} < x < \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2} < y < \tfrac{1}{2}\}$$

van $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$. Dan is er bij iedere $a \in I$ met $f(a) = (0,0)$ een samenhangende omgeving $V \subset I$ van a te vinden zodat $f(V) \subset U$. Ook is $f(V) \subset A$. Bovendien is $f(V)$ samenhangend. Dus $f(V) =$ $= \{(0,0)\}$ omdat $\{(0,0)\}$ de samenhangscomponent van $\{(0,0)\}$is <u>in $U \cap A$.</u> (Maak een tekening!) We concluderen dat $f^{-1}\{(0,0)\}$ open is in I. Maar $f^{-1}\{(0,0)\}$ is ook gesloten (f is continu) dus is een niet leeg brok van I ($\{0\}$ zit er zeker in). Dus $f^{-1}\{(0,0)\} = I$.

We bewijzen de volgende partiële omkering van stelling (3.31).

(3.33) <u>Stelling</u>. Zij A een <u>open</u>, samenhangende deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ (voorzien van de gebruikelijke topologie). Dan is A boogsamenhangend.

<u>Bewijs</u>. Zij $x \in A$ en zij $B \subset A$ de verzameling van alle punten $y \in A$ die met x te verbinden zijn door een weg die geheel binnen A verloopt. Dan is B een brok van A. Immers,

1) B is open in A. Zij $z \in B$; dan is er een ε- bol U om z zodat $U \subset A$ (A open). Ieder punt van U kan binnen U (zie (3.29)), dus binnen A, met z verbonden worden en z kan binnen A met x verbonden worden door een weg. Wegens (3.26) is dus $U \subset B$.

2) B is gesloten in A. Zij $z \in A$, $z \notin B$. Dan is er een δ-bol V om z zodat $V \subset A$. Maar $B \cap V = \phi$. Immers, was dat niet zo, dan was er een $u \in B \cap V$, en een soortgelijke redenering als in 1) toont dan aan: $z \in B$.

Dus B is inderdaad een brok van A. $B \neq \phi$, immers $x \in B$, dus $B = A$. Ieder punt van A is dus binnen A met x te verbinden. Via stelling (3.26) zien we dan dat A boogsamenhangend is.

(3.34) Stelling. Boogsamenhang is een continue invariant.

Bewijs als opgave.

We sluiten dit hoofdstuk af met een voorbeeld.

(3.35) Voorbeeld. We beschouwen de topologische ruimte X van de orthogonale lineaire afbeeldingen in $\mathbb{R}^2$ op zichzelf. De topologie op X bepalen we door X op te vatten als deelverzameling van $\mathbb{R}^4$. Kies daartoe een orthonormale basis van $\mathbb{R}^2$. Op deze basis heeft een element $x \in X$ de matrix

$$\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} .$$

Identificeer x nu met het punt

$$(\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{21}, \xi_{22}) \in \mathbb{R}^4 .$$

De definiërende vergelijkingen van een orthogonale matrix zijn de orthogonaliteitsrelaties:

$$\xi_{11}^2 + \xi_{21}^2 = 1, \ \xi_{12}^2 + \xi_{22}^2 = 1$$

en $\xi_{11}\xi_{12} + \xi_{21}\xi_{22} = 0.$

De linkerleden van deze vergelijkingen zijn continue afbeeldingen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$. De oplossingsverzamelingen van deze vergelijkingen zijn dus gesloten delen van $\mathbb{R}^4$. Bijgevolg is hun doorsnede, X, gesloten in $\mathbb{R}^4$. Maar X is ook begrensd, want $|\xi_{ij}| \leqslant 1$ wegens de orthogonaliteitsrelaties. Dus X is compact (zie Analyse II, stelling (7.18)).
De determinant is een continue afbeelding $X \to \mathbb{R}$, met waarden +1 en -1. Dus det (X) is niet samenhangend. Bijgevolg is X niet samenhangend (zie (3.24)).

Kijken we nu naar de deelverzameling $D \subset X$, bestaande uit de orthogonale afbeeldingen met determinant +1 (de draaiingen), dan zien we dat D boogsamenhangend is. Immers, ieder element van D heeft de vorm

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Elk element van D is dus binnen D te verbinden met $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in D$ via de weg

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t\phi & \sin t\phi \\ -\sin t\phi & \cos t\phi \end{pmatrix} \quad (t \in [0,1]).$$

Als gesloten deel van X (laat dat zien!) is ook D compact.

Analoge resultaten zijn af te leiden voor de draaispiegelingen van $\mathbb{R}^2$.

Hoofdstuk IV. Scheidingsaxioma's.

In het voorgaande hebben we ons in de theorie beziggehouden met algemene topologische ruimten. In opgave (2.23) hebben we gezien dat een rij dan wel eens meer dan een limiet kan hebben. Om aan deze en aan andere ongerieflijkheden tegemoet te komen, gaan we nu de topologische ruimten indelen naar scheidbaarheid van punten door open verzamelingen.

(4.1) Definitie. Zij X een topologische ruimte.

a). X heet een T_0-ruimte als voor elk tweetal verschillende punten $x, y \in X$ geldt: Er is een omgeving U_x van x zodat $y \notin U_x$, of: Er is een omgeving U_y van y zodat $x \notin U_y$.

b). X heet een T_1-ruimte als er bij elk tweetal verschillende punten $x, y \in X$ omgevingen U_x van x en U_y van y zijn zodat $x \notin U_y$ en $y \notin U_x$.

c). X heet een T_2-ruimte, of een Hausdorffruimte, als er bij elk tweetal verschillende punten $x, y \in X$ omgevingen U_x van x en U_y van y zijn zodat $U_x \cap U_y = \phi$.

(4.2) Opgave. $(X,\mathcal{T})$ als in opgave (1.6). Laat zien dat X een T_0-ruimte is, maar geen T_1-ruimte.

(4.3) Opgave. Als (4.2), voor X uit opgave (1.8).

(4.4) Opgave. X is een oneindige verzameling. Open deelverzamelingen van X zullen zijn ϕ, X, en de complementen van eindige deelver-

zamelingen. Toon aan dat dit een topologie op X definieert, en dat X zo een T_1-ruimte is, maar geen T_2-ruimte.

(4.5) Opgave. Laat zien dat in een T_1-ruimte elk punt een gesloten verzameling is.

(4.6) Opgave. Een metrische ruimte is een Hausdorff-ruimte.

Een metrische ruimte voldoet aan een veel sterkere eis, dan alleen het Hausdorffs zijn, zij is nl. normaal, d.w.z.: Bij ieder tweetal gesloten verzamelingen A en B zodat $A \cap B = \phi$, zijn er open verzamelingen U en V zodat $A \subset U$, $B \subset V$ en $U \cap V = \phi$.

Voor het bewijs van deze bewering roepen we Analyse II, opgave 20, in herinnering, waar in een metrische ruimte (X,ρ) een afstand d gedefiniëerd wordt voor deelverzamelingen van X. Laat nu zelf zien dat de verzamelingen

$$U = \{x \in X \mid d(x,A) < d(x,B)\}$$

en

$$V = \{x \in X \mid d(x,A) > d(x,B)\}$$

voldoen. (Vergeet niet aan te tonen dat U en V open zijn!)

(4.7) Stelling. Een compacte deelverzameling C van een Hausdorffruimte X is gesloten.

Bewijs. We tonen aan dat er bij ieder punt $x \in X$ met $x \notin C$, een open omgeving U van x te vinden is, zodat $U \cap C = \phi$. Daartoe kiezen we bij iedere $c \in C$ open omgevingen U_c van x en V_c van c zodat $U_c \cap V_c = \phi$. Dat kan, want X is Hausdorffs. (Ga na). De collectie $\{V_c \mid c \in C\}$ is een open overdekking van C. Er zijn dus reeds eindig veel $V_{c_1}, \ldots, V_{c_n}$ zodat

$C \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{c_i}$. Voor de omgeving U van x kiezen we nu $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{c_i}$.

Dan geldt:

U is open als doorsnede van eindig veel open verzamelingen,
$x \in U$ omdat $x \in U_{c_i}$ en $U \cap \bigcup_{i=1}^{n} V_{c_i} = \phi$, dus zeker $U \cap C = \phi$.

(4.8) Stelling. Een continue bijectie f van een compacte topologische ruimte X op een Hausdorffruimte Y is een homeomorfisme.

Bewijs. We hoeven slechts aan te tonen dat f een open afbeelding is. (vergelijk opgave (2.9)). Zij $U \subset X$ open. Dan is $X \setminus U$ gesloten, dus compact (zie opgave (3.4)). Bijgevolg is $f(X \setminus U)$ compact (continue invariant). Volgens stelling (4.7) is $f(X \setminus U)$ dan gesloten in Y. Omdat f een bijectie is, geldt $f(U)=Y\setminus f(X\setminus U)$, dus f(U) is open in Y.

(4.9) Opgave. Een compacte Hausdorffruimte X is normaal.
Aanwijzing: Toon eerst aan dat X regulier is. D.w.z.: bij iedere gesloten deelverzameling $A \subset X$ en ieder punt $x \notin A$ zijn er open verzamelingen U en V zodat $A \subset U$, $x \in V$ en $U \cap V = \phi$. Laat U hierbij inspireren door het bewijs van stelling (4.7).

(4.10) Opgave. Zij A een deelverzameling van een T_1-ruimte. Bewijs: Een omgeving van een verdichtingspunt van A bevat oneindig veel punten van A.

(4.11) Opgave. Bewijs: In een T_2-ruimte heeft een rij hoogstens één limiet. (vgl. definitie 2.21).

(4.12) Opmerking. Onder (4.6) en (4.9) hebben we gedefinieerd wat normaal, resp. regulier betekent. Meestal zegt men dat een ruimte normaal, resp. regulier is, als hij bovenvermelde eigenschappen heeft èn een T_1-ruimte is.

Hoofdstuk V. Enkele bijzondere topologische ruimten.

Aan de orde komen achtereenvolgens produktruimten, funktieruimten en topologische groepen.

A. Produktruimten.

Eindige produkten.

Gegeven eindig veel topologische ruimten $X_1, X_2,\ldots,X_n$. Dan zijn er een aantal min of meer natuurlijke manieren om $\prod_{i=1}^{n} X_i$ van een topologie te voorzien, bijvoorbeeld:

a. De Tychonoff-topologie (zie § 2).

b. De fijne produkttopologie (zie § 2).

c. Als iedere X_i metrisch is, met metriek ρ_i, dan kan men van $\prod_{i=1}^{n} X_i$ een metrische ruimte maken met metriek ρ. Voorbeelden:

$$\rho(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \rho_i(x_i,y_i)$$

$$\rho(x,y) = \max_{i=1,2,\ldots,n} \rho_i(x_i,y_i)$$

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\rho_i(x_i,y_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

N.B. Hier is $x = (x_1,\ldots,x_n)$ en $y = (y_1,\ldots,y_n)$.

(5.1) Opgave. Laat zien dat in het geval van eindig veel topologische ruimten alle bovengenoemde topologieëen op de produktruimte met elkaar overeenstemmen. Dus ook de genoemde metrische topologieën leveren weer de Tychonoff-topologie op.

Oneindige produkten.

In het geval van oneindig veel topologische ruimten X_γ, waarbij

γ een index-verzameling Γ doorloopt, is de Tychonoff-topologie op $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ in het algemeen grover dan de fijne produkttopologie (Wanneer vallen ze ook hier samen?)

(5.2) Voorbeeld. $X = \{a,b\}$, voorzien van de discrete topologie (d.w.z. ieder singleton is open). Definieer nu $X_n = X$ voor $n \in \mathbb{N}$. Dan is de fijne produkttopologie op $\prod X_n$ precies de discrete topologie. In deze topologie heeft de rij $(x^{(j)})$ met $x^{(j)}_n = a$ als $n \leq j$ en $x^{(j)}_n = b$ als $n > j$, geen limiet. Dezelfde rij convergeert echter wel in de Tychonoff-topologie en heeft daar als limiet het punt x met $x_n = a$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Een oneindig produkt van metrische ruimten kan men in het algemeen niet voorzien van een voor de hand liggende metriek zoals in het eindige geval. We geven een voorbeeld waarbij het wel kan.

(5.3) Laten (X_γ, ρ_γ), $\gamma \in \Gamma$ metrische ruimten zijn, en veronderstel dat er een getal N is zodat $\rho_\gamma(x,y) < N$ voor iedere $\gamma \in \Gamma$ en voor alle $x, y \in X_\gamma$. Dan kan $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ voorzien worden van de metriek

$$\rho(u,v) = \sup_{\gamma\in\Gamma} \rho_\gamma(u_\gamma,v_\gamma).$$

waarbij u_γ, v_γ de γ-de coördinaten zijn van u en v.

(5.4) Opgave. Het segment $I = [0,1]$ is voorzien van de gewone metrische topologie. Beschouw $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, waarin $X_n = I$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Zij $\mathcal{T}_t$ de Tychonoff-topologie, $\mathcal{T}_f$ de fijne produkttopologie, en $\mathcal{T}_m$ de metrische topologie (zoals in (5.3)) op X. Laat zien

$$\mathcal{T}_t \underset{\neq}{\subset} \mathcal{T}_m \underset{\neq}{\subset} \mathcal{T}_f.$$

(5.5) <u>Opmerking</u>. De fijne produkttopologie op een oneindig produkt van topologische ruimten wordt zeer zelden gebruikt. Daarom gebruikt men in de literatuur vaak de term "<u>produkttopologie</u>" in plaats van "<u>Tychonoff-topologie</u>". De produktruimte, voorzien van de Tychonoff-topologie, heet ook wel het <u>topologisch produkt</u>.

(5.6) <u>Opgave</u>. Gegeven een topologische ruimte X. Bewijs: X is een Hausdorffruimte $\Leftrightarrow$ in het topologische produkt $X \times X$ is de diagonaal $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ een gesloten verzameling.

B. <u>Funktieruimten</u>.

Bij gegeven topologische ruimten X en Y bekijken we de verzameling Y^X van alle continue afbeeldingen van X naar Y. Van de mogelijke topologieën op Y^X zullen we de drie belangrijkste behandelen, nl.:

a. De compact-open topologie.

b. De topologie van puntsgewijze convergentie.

c. De topologie van uniforme convergentie, indien Y een metrische ruimte is met begrensde metriek.

<u>De compact-open topologie $\mathcal{T}_{c-0}$ op Y^X.</u>

Bij een compacte deelverzameling $C \subset X$ en een open deelverzameling $0 \subset Y$ vormen we de deelverzameling $A(C,0) \subset Y^X$, gedefinieerd door

$$A(C,0) = \{f : X \to Y \mid f(C) \subset 0\}.$$

De compact-open topologie op Y^X is nu precies dié topologie waarvoor de collectie $\{A(C,O)\}$, C compact in X en O open in Y, een subbasis van open verzamelingen is.

(5.7) Opgave. Hoe ziet een basis-omgeving van een element $f \in Y^X$ er uit in de topologie $\mathcal{T}_{c-0}$?

De topologie $\mathcal{T}_p$ van de puntsgewijze convergentie op Y^X.

Iedere $x \in X$ levert een afbeelding
$\pi_x : Y^X \to Y$ door $\pi_x(f) = f(x)$. De topologie $\mathcal{T}_p$ op Y^X is de grofste topologie waarvoor alle π_x $(x \in X)$ continue afbeeldingen zijn (zie § 2).

(5.8) Opgave. Definieer $\mathcal{T}_p$ op een manier, analoog aan de bovenstaande definitie van $\mathcal{T}_{c-0}$.

(5.9) Opgave. Hoe ziet een basis-omgeving van een element $f \in Y^X$ er uit in de topologie $\mathcal{T}_p$?

(5.10) Opgave. Y^X is voorzien van de topologie $\mathcal{T}_p$. Laat zien: $f \in Y^X$ is een limiet van de rij (f_n) $\Leftrightarrow$ voor iedere $x \in X$ is $f(x)$ een limiet van de rij $(f_n(x))$ in Y.

De topologie $\mathcal{T}_u$ van uniforme convergentie op Y^X.

Zij Y een metrische ruimte met begrensde metriek ρ; d.w.z. er is een getal N zodat $\rho(y,y') < N$ voor alle $y, y' \in Y$. Dan kunnen we Y^X voorzien van de metriek

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$$

waarbij $f, g \in Y^X$. $\mathcal{T}_u$ is de topologie die door deze metriek d

op Y^X gedefinieerd wordt.

(5.11) Opgave. Laat zien: Als X compact is en Y metrisch, dan kan men Y^X voorzien van de topologie $\mathcal{T}_u$ zonder te veronderstellen dat de metriek op Y begrensd is.

(5.12) Opgave. Laat zien dat $\mathcal{T}_{c-0} \supset \mathcal{T}_p$.

(5.13) Opgave. Bewijs: Als Y een metrische ruimte is met begrensde metriek, dan is $\mathcal{T}_{c-0} \subset \mathcal{T}_u$.

Leidraad: Het is voldoende, te bewijzen dat iedere open verzameling uit een subbasis van $\mathcal{T}_{c-0}$ ook open is in $\mathcal{T}_u$.

Zij dus $C \subset X$ compact en $0 \subset Y$ open. Laat voor een $f \in Y^X$ gelden: $f(C) \subset 0$, dus $f \in A(C,0)$. Omdat $f(C)$ compact is, is er een $\varepsilon > 0$ zodat in Y geldt: $B(f(x);\varepsilon) \subset 0$ voor iedere $x \in C$. Dus voor alle $g \in Y^X$ met $d(f,g) < \varepsilon$ is $g(C) \subset 0$.

(5.14) Opgave. In $\mathbb{R}$ met de gewone metriek bekijken we $X=(0,3)$ en $Y=[0,3]$. We tonen aan $\mathcal{T}_{c-0} \neq \mathcal{T}_p$ op Y^X. Definieer hiertoe afbeeldingen $f_{r,\varepsilon} : X \to Y$ door

$$f_{r,\varepsilon}(x) = 0 \text{ als } |x-r| \geqslant \varepsilon$$
$$= 1 - \frac{1}{\varepsilon}|x-r| \text{ als } |x-r| \leqslant \varepsilon$$

Bekijk nu in Y^X de deelverzameling

$$A = \{f_{r,\varepsilon} \mid 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 < \varepsilon < 1\}$$

Laat zien dat de nulafbeelding wel een verdichtingspunt van A in $\mathcal{T}_p$, maar niet in $\mathcal{T}_{c-0}$.

(5.15) Opgave. X en Y als in opgave (5.14). Toon op een analoge manier aan dat $\mathcal{T}_u \neq \mathcal{T}_{c-0}$, door in Y^X de deelverzameling

$$B = \{f_\varepsilon \mid 0 < \varepsilon < 3\}$$

te bekijken, waarbij $f_\varepsilon : X \to Y$ gedefinieerd is door

$$f_\varepsilon(x) = 1 - \frac{1}{\varepsilon}x \text{ als } 0 < x \leqslant \varepsilon$$
$$= 0 \quad \text{als } \varepsilon \leqslant x < 3.$$

(5.16) Opgave. Breng de topologie $\mathcal{T}_p$ op Y^X in verband met de Tychonoff-topologie op $\prod_{x \in X} Y_x$, waarin $Y_x = Y$ voor alle $x \in X$. (Beschouw Y^X als deelverzameling van het gegeven topologische produkt).

C. Topologische groepen.

(5.17) Definitie. Een topologische groep G is een verzameling met twee structuren.

1. G is een groep.
2. G is een topologische ruimte

die als volgt samenhangen:

3. De afbeelding $(x,y) \mapsto xy^{-1}$ van het topologisch produkt $G \times G$ naar G is continu.

Ga na dat conditie 3. vertaald kan worden in de meer aanschouwelijke vorm

3'. Bij iedere $a, b \in G$ en iedere omgeving W van ab^{-1} in G zijn er omgevingen U van a en V van b in G zodat $U \cdot V^{-1} \subset W$. Hier is

$$U \cdot V^{-1} = \{xy^{-1} \mid x \in U, y \in V\}.$$

(5.18) Opgave. Zij G zowel een groep als een topologische ruimte. Bewijs: G is een topologische groep, dan en slechts dan als voldaan is aan

1. de afbeelding $y \mapsto y^{-1} : G \to G$ is continu
2. de afbeelding $(x,y) \mapsto xy : G \times G \to G$ is continu.

(5.19) Opgave. Laat zien: Voor iedere $y \in G$ zijn de afbeeldingen $x \mapsto xy : G \to G$ en $x \to xy^{-1} : G \to G$ homeomorfismen.

(5.20) Opgave. G is een topologische groep. Toon aan : $U \subset G$ is een omgeving van $x \in G \Leftrightarrow x^{-1} \cdot U$ is een omgeving van het eenheidselement $e \in G$.

Een gevolg van opgave (5.20) is, dat de topologie op een topologische groep volledig bekend is, zodra we alle omgevingen van e kennen.

De uitspraak "G is een topologische groep" stelt vrij sterke eisen aan de topologie op G. Zo geldt bijvoorbeeld de volgende stelling.

(5.21) Stelling. Een topologische groep G is een T_0-ruimte $\Rightarrow$ G is een Hausdorffruimte.

Bewijs. Door opgave (5.20) te gebruiken ziet men dat er bij $x,y \in G$ een omgeving W van xy^{-1} is zodat $e \notin W$. Bij W zijn er omgevingen U van x en V van y zodat $U \cdot V^{-1} \subset W$. Omdat $e \notin W$, zijn U en V disjunct ($U \cap V = \phi$).

Enkele voorbeelden van topologische groepen zijn:

1. $\mathbb{R}$ met optelling en gewone topologie.
2. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ met vermenigvuldiging en gewone topologie.
3. $\mathbb{R}^n$ met optelling en topologie geïnduceerd door een inprodukt.
4. De eenheidscirkel in $\mathbb{C}$, met vermenigvuldiging en topologie geïnduceerd door de gewone topologie op $\mathbb{C}$.

5. Iedere groep, voorzien van de discrete topologie.

We bewijzen nog de volgende, aardige toepassing van de compact-open topologie.

(5.22) Zij X een compacte Hausdorff-ruimte, en zij $(X^X)_0$ de deelverzameling van X^X, bestaande uit de homeomorfismen van X op zichzelf. Met als bewerking de samenstelling van afbeeldingen, is $(X^X)_0$ een groep. Voorzien we $(X^X)_0$ van de topologie, geïnduceerd door de compact-open topologie op X^X, dan is $(X^X)_0$ een topologische groep.

<u>Bewijs</u>. We verifiëren conditie 3'. Laten dus f en g homeomorfismen van X zijn, dan moeten we bij iedere omgeving W van $f \circ g^{-1}$ omgevingen U en V van f, resp. g vinden, zodat $U \circ V^{-1} \subset W$. Ga na dat het voldoende is als we voor W een subbasis-omgeving nemen. Zij dus $C \subset X$ compact en $O \subset X$ open zodat $f \circ g^{-1}(C) \subset O$. Dus $f \circ g^{-1} \in W = A(C,O)$. Dan is $g^{-1}(C)$ gesloten, $f^{-1}(O)$ is open, en $g^{-1}(C) \subset f^{-1}(O)$. Er is dus een open $P \subset X$ en een gesloten $Q \subset X$ zodat

$$g^{-1}(C) \subset P \subset Q \subset f^{-1}(O)$$

(Pas opgave (4.9) toe). Bekijk nu in X^X de open verzamelingen

$$U' = A(Q,O) \text{ en } V' = A(P^*, C^*)$$

(waarom zijn die open ?). Dan is $f \in U'$, en $g \in V'$. Toon nu zelf aan dat we voor U en V kunnen kiezen

$$U = U' \cap (X^X)_0 \text{ en } V = V' \cap (X^X)_0 \quad .$$

Hoofdstuk VI. Het lemma van Urysohn; metriseerbaarheid.

Gegeven een topologische ruimte X. Verder nemen we aan dat $\mathbb{R}$, de reële getallen, voorzien is van de gebruikelijke topologie. Dan zijn er altijd continue functies $X \to \mathbb{R}$, zij het dan misschien dat alleen de constante functie continu is. Vooral in de analyse doet zich veelal de vraag voor: Zijn er voldoende veel continue functies $X \to \mathbb{R}$ om de punten van X te scheiden? Met andere woorden: Is er bij elk tweetal punten $x,y \in X$, $x \neq y$, een continue functie zodat $f(x) \neq f(y)$.

Deze vraag kan zeker bevestigend worden beantwoord wanneer de ruimte X normaal is, d.w.z.

1. X is een T_1-ruimte (zie def. (4.1)).
2. Gegeven gesloten verzamelingen $A,B \subset X$, met $A \cap B = \phi$, dan zijn er open verzamelingen $U,V \subset X$ met $U \cap V = \phi$ en $A \subset U$ en $B \subset V$.

(6.1) Stelling. (Urysohn's lemma).

Zij de ruimte X normaal. Laten A en B gesloten deelverzamelingen van X zijn, zodat $A \cap B = \phi$. Dan is er een continue functie $f: X \to [0,1]$ met $f(A) = 0$ en $f(B) = 1$.

Bewijs. Bij ieder rationaal getal $r \in [0,1]$ construeren we een verzameling $P_r \subset X$ zodat voldaan is aan de volgende eisen:

1. $P_0 = A$, $P_1 = X \setminus B$
2. $\overline{P}_r \subset P_{r'}$ als $r < r'$
3. P_r open voor iedere rationale $r \in (0,1]$.

Vervolgens definiëren we $f: X \to [0,1]$ door

$f(B) = 1$

en $f(x) = \inf \{ r \mid x \in P_r \}$ als $x \notin B$,

en laten zien dat f continu is. De verzamelingen P_r construeren we als volgt. De rationale getallen in $[0,1]$ zijn aftelbaar. Nummer ze dan: $r_1, r_2, r_3, \ldots$, zodanig dat $r_1 = 0$ en $r_2 = 1$. P_{r_1} en P_{r_2} zijn dus reeds gegeven door eis 1. Stel nu dat we P_{r_i} voor $i = 1, 2, \ldots, n$ reeds geconstrueerd hebben, en dat ze voldoen aan de eisen. Om $P_{r_{n+1}}$ te construeren, zoeken we onder de $r_1, r_2, \ldots, r_n$ het grootste element dat nog kleiner is dan r_{n+1} en het kleinste element dat nog groter is dan r_{n+1}. Stel deze elementen zijn respectievelijk r_i en r_j. Volgens de eisen zijn $\overline{P}_{r_i}$ en $X \setminus P_{r_j}$ disjuncte gesloten verzamelingen. Wegens de normaliteit van X zijn er dus open verzamelingen U en V met $\overline{P}_{r_i} \subset U$, $X \setminus P_{r_j} \subset V$ en $U \cap V = \phi$.

Stel nu $P_{r_{n+1}} = U$. Men gaat gemakkelijk na dat de verzamelingen $P_{r_1}, P_{r_2}, \ldots, P_{r_n}, P_{r_{n+1}}$ weer aan de eisen voldoen.

Tenslotte moeten we nog aantonen dat f continu is. Zij $f(x) < \beta$ voor zekere $x \in X$ en $\beta \in (0,1]$. Volgens de definitie van f betekent dit: er is een rationaal getal r, $r < \beta$, zodat $x \in P_r$, maar dan ook $x \in P_s$ als $s \geq r$. Omgekeerd volgt ook: als $x \in P_t$, dan is $f(x) \leq t$. Conclusie:

als $f(x) \in [0,\beta)$, dan is er een open verzameling P_t met $x \in P_t$ en $f(P_t) \subset [0,\beta)$. Dus $f^{-1}([0,\beta))$ is open in X.

Zij $f(x) > \gamma$ voor zekere $x \in X$ en $\gamma \in [0,1)$. Volgens de definitie van f betekent dit: er is een rationaal getal r, $r > \gamma$, zodat $x \notin P_r$, maar dan ook $x \notin \overline{P}_s$ als $s < r$. Omgekeerd volgt: als $x \notin \overline{P}_t$, dan $x \notin P_t$, dus $x \notin P_s$ voor alle $s \leq t$, dus $f(x) \geq t$. Conclusie:

als $f(x) \in (\gamma,1]$, dan is er een open verzameling $X\setminus\bar{P}_t$ met $x \in X\setminus\bar{P}_t$ en $f(X\setminus\bar{P}_t) \subset (\gamma,1]$. Dus $f^{-1}((\gamma,1])$ is open in X.

Een basis van open verzamelingen in $[0,1]$ wordt gegeven door verzamelingen van de vorm $[0,\beta)$, $(\gamma,1]$ en (γ,β). Boven is reeds bewezen: $f^{-1}([0,\beta))$ en $f^{-1}((\gamma,1])$ zijn open in X. Maar dan is ook $f^{-1}((\gamma,\beta)) = f^{-1}([0,\beta)) \cap f^{-1}((\gamma,1])$ open in X. Volgens opgave (2.3) is f een continue functie.

De metrische ruimten zijn een speciaal soort topologische ruimten. Uit hoofdstuk IV blijkt: een metrische ruimte is een Hausdorff-ruimte. Sterker nog: een metrische ruimte is normaal.

(6.2) Definitie. Een topologische ruimte $(X,\mathcal{T})$ heet metriseerbaar als het mogelijk is X te voorzien van een metriek ρ, zodanig dat de door ρ geïnduceerde topologie samenvalt met $\mathcal{T}$.

Gezien het voorgaande is het dus zeker niet zo dat iedere topologische ruimte metriseerbaar is. Noodzakelijk is in ieder geval de normaliteit.

(6.3) Stelling. Zij de topologische ruimte $(X,\mathcal{T})$ normaal, en laat $\mathcal{T}$ een aftelbare basis $\mathcal{B}$ bezitten. Dan is $(X,\mathcal{T})$ metriseerbaar.

Bewijs. Nummer de basiselementen: $B_1, B_2, \ldots$. Bij ieder paar B_i, B_j (geordend) kiezen we een continue functie $f_{i,j}: X \to [0,1]$ met de volgende eigenschappen:

1. Als $\overline{B}_i \not\subset B_j$ dan $f_{i,j}X = 0$.
2. Als $\overline{B}_i \subset B_j$ dan is $f_{i,j}(\overline{B}_i) = 0$ en $f_{i,j}(X \backslash B_j) = 1$.
   (Dit kan volgens het lemma van Urysohn).

Bekijk nu voor $x,y \in X$ de uitdrukking

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \Big(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} 2^{-i-j} |f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)|^2 \Big) \right)^{\frac{1}{2}} .$$

We zullen nu eerst verifiëren dat deze ρ een metriek op X is. Wegens de speciale vorm van de $f_{i,j}$ wordt de reeks in de uitdrukking voor $\rho(x,y)$ gemajoreerd door $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\substack{i,j \\ i+j=n}} 2^{-i-j}$, hij is dus convergent, en bijgevolg is $\rho(x,y)$ voor alle x en y een reëel getal. Zij nu $x \neq y$. Dan zijn er wegens de normaliteit van X basisomgevingen B_{i_o} en B_{j_o} van x zodat $x \in B_{i_o} \subset \overline{B}_{i_o} \subset B_{j_o}$ en $y \notin B_{j_o}$. Dus $f_{i_o,j_o}(x) = 0$ en $f_{i_o,j_o}(y) = 1$. Bijgevolg is dan $\rho(x,y) \geqslant (2^{-i_o-j_o})^{\frac{1}{2}} > 0$. De verificatie van de overige eisen (symmetrie en driehoeksongelijkheid) wordt aan de lezer overgelaten. Nu moeten we nog laten zien dat de door ρ geïnduceerde topologie $\mathcal{M}$ samenvalt met $\mathcal{T}$. Een basis voor $\mathcal{M}$ wordt gegeven door de ε-bollen $B(x;\varepsilon) = \{y | \rho(x,y) < \varepsilon\}$.

Met behulp van de continuïteit van de $f_{i,j}$ en de uniforme convergentie van de reeks voor $\rho(x,y)$, toont men aan dat $\rho(x,y)$ bij vaste x een continue afbeelding is van X naar $[0,1]$ (X voorzien van $\mathcal{T}$). Dus $B(x;\varepsilon)$ is open in $\mathcal{T}$. Zij van de andere kant U open in $\mathcal{T}$ en $x \in U$. Dan zijn er basisomgevingen B_{k_o} en B_{l_o} van x zodat

$$x \in B_{k_o} \subset \overline{B}_{k_o} \subset B_{l_o} \subset U.$$

Dus $f_{k_o,l_o}(x) = 0$, en bovendien geldt

$$\{y \mid f_{k_o,l_o}(y) < 1\} \subset B_{l_o}.$$

Ook hebben we de implicatie

$$z \in B(x;\varepsilon) \Rightarrow 2^{-k_o-l_o}|f_{k_o,l_o}(x)-f_{k_o,l_o}(z)|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_{k_o,l_o}(z)| < \sqrt{(2^{k_o+l_o}\varepsilon^2)}$$

Dus $B(x; \sqrt{2^{-k_o-l_o}}) \subset B_{l_o} \subset U$, en dit wil zeggen dat U open is .

(6.4) Opmerking. Stelling (6.3) is niet omkeerbaar. Een metrische ruimte is wel normaal, maar hoeft niet noodzakelijk een aftelbare basis te bezitten. Voor meer informatie hierover raadplege men "Hocking & Young", sectie 2-12 en omgeving. Stelling (6.3) is wel omkeerbaar wanneer we een compactheidseis inbouwen:

(6.5) Stelling. Een compacte topologische ruimte X is metriseerbaar dan en slechts dan als hij normaal is en een aftelbare basis voor de open verzamelingen bezit.

Bewijs. Het "dan" is bewezen in stelling (6.3). Voor het "slechts dan" hoeven we alleen aan te tonen dat een compacte metrische ruimte een aftelbare basis bezit. Zij X dus compact en metrisch. Voor iedere $n \in \mathbb{N}$ is er een eindige overdekking van X met open $\frac{1}{n}$-bollen. Zij $\mathcal{U}_n$ de collectie van deze eindig vele $\frac{1}{n}$-bollen. Beschouw nu $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n$ en laat zelf zien dat $\mathcal{B}$ een aftelbare basis is voor de topologie van X.

Een metrische ruimte X met de eigenschap dat er voor iedere $\varepsilon > 0$ een eindige overdekking van X met open ε-bollen bestaat, heet pre-compact (ook wel: totaal beperkt).

Wanneer we het bewijs van stelling (6.5) nog eens nalezen, dan vinden we daarin de volgende implicaties:

(6.6) a) X compact, metrisch ⇒ X pre-compact.

b) X pre-compact ⇒ de topologie op X heeft een aftelbare basis.

We grijpen deze gelegenheid aan om opmerking (3.8) te bewijzen: aftelbaar compact en metrisch ⇒ compact.

(6.7) Lemma. Zij X een aftelbaar compacte, metrische ruimte. Dan is X pre-compact.

Bewijs. Zij $\varepsilon > 0$, en veronderstel dat X niet overdekt kan worden met eindig veel open ε-bollen. Dan kunnen we in X een oneindige rij punten $x_1, x_2, \ldots$ vinden zodat $x_i \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} B(x_j;\varepsilon)$ (ga na!). Dus voor alle $i \neq j$ geldt $\rho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ als ρ de metriek op X is. De oneindige verzameling $\{x_1, x_2, \ldots\}$ heeft dus geen verdichtingspunt (ga na), in tegenspraak met het aftelbaar compact zijn van X.

(6.8) Lemma. Veronderstel dat X een aftelbare basis van open verzamelingen heeft. Dan is iedere overdekking $\mathcal{U}$ van X met open verzamelingen uit te dunnen tot een aftelbare overdekking.

Bewijs. Schrijf iedere $U \in \mathcal{U}$ als vereniging van basiselementen. Dan krijgen we een overdekking van X met basiselementen, maar dit zijn er slechts aftelbaar veel! Kies nu bij ieder basiselement uit deze nieuwe overdekking één $U \in \mathcal{U}$ die dat basiselement omvat.

(6.9) Lemma. Zij X een aftelbaar compacte T_1-ruimte. Dan is iedere aftelbare overdekking $\mathcal{U}$ van X met open verzamelingen uit te dunnen tot een eindige overdekking.

Bewijs. Zij $\mathcal{U}$ een aftelbare overdekking van X die niet uit te dunnen is tot een eindige overdekking. Nummer dan de elementen van $\mathcal{U}$: U_1, U_2,..., en dun $\mathcal{U}$ zover uit dat voor iedere $i \geq 2$ geldt $U_i \not\subset \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$. Vervolgens kiezen we een rij punten x_1, x_2,... zodat $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2 \setminus U_1$,..., $x_i \in U_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} U_j$,.... Ik beweer: deze oneindige verzameling $\{x_1, x_2, \ldots\}$ heeft geen verdichtingspunt. Immers, zij $a \in X$ verdichtingspunt. Dan moet a in een van de verzamelingen U_1, U_2,... liggen. Zeg $a \in U_n$. U_n is dus een omgeving van a. Daar X een T_1-ruimte is, moet U_n oneindig veel x_i bevatten. Echter, uit de constructie blijkt: $x_j \notin U_n$ voor alle $j > n$. Conclusie: $\{x_1, x_2, \ldots\}$ heeft geen verdichtingspunt, in tegenspraak met het aftelbaar compact zijn van X.

Als een corollarium van deze lemma's bewijst men nu gemakkelijk de gevraagde stelling:

(6.10) Stelling. Een aftelbaar compacte metrische ruimte is compact.

(6.11) Opgave. Bewijs de volgende verscherping van lemma (6.9):

Zij X een T_1-ruimte. Dan is X aftelbaar compact $\Leftrightarrow$ iedere aftelbare overdekking van X met open verzamelingen is uit te dunnen tot een eindige overdekking.

(6.12) Opgave. Gebruik opgave (1.6) om aan te tonen dat de voorwaarde "X is een T_1-ruimte" in opgave (6.11) niet gemist kan worden.

Hoofdstuk VII. De stelling van Tychonoff.

(7.1) Stelling. (Tychonoff). Zij X_γ, $\gamma \in \Gamma$, een collectie compacte topologische ruimten. Dan is het topologisch product $X = \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ compact. (N.B.: X is dus voorzien van de Tychonoff-topologie; zie (2.15) en (2.16)..

Alvorens deze stelling te bewijzen, laten we eerst zien dat het al of niet compact zijn van een topologische ruimte $(X,\mathcal{T})$ kan worden geformuleerd in termen van een subbasis $\mathcal{S}$ van $\mathcal{T}$.

(7.2) Stelling. (Alexander). Zij $\mathcal{S}$ een subbasis voor de topologie op X. Als iedere overdekking van X met elementen van $\mathcal{S}$ kan worden uitgedund tot een eindige overdekking, dan is X compact.

Ook deze stelling zullen we pas bewijzen na een aantal inleidende opmerkingen.

(7.3) 1. Uit definitie (3.2) volgt: $(X,\mathcal{T})$ is compact als voor iedere deelcollectie $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$ geldt: Als geen eindige deelcollectie van $\mathcal{O}$ de ruimte X overdekt, dan is ook $\mathcal{O}$ geen overdekking van X.

2. Zij $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}$ zodanig dat geen eindige deelcollectie van $\mathcal{O}$ de ruimte X overdekt.
Zij verder $\mathcal{O}' \subset \mathcal{T}$ maximaal met betrekking tot de eigenschappen

(a) $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$

(b) geen eindige deelcollectie van $\mathcal{O}'$ overdekt X.

"Maximaal" wil zeggen: als $\mathcal{O}'' \subset \mathcal{T}$ de eigenschappen (a) en (b) heeft en $\mathcal{O}'' \supset \mathcal{O}'$, dan $\mathcal{O}'' = \mathcal{O}'$. Voor het bestaan van zo'n $\mathcal{O}'$ zie men opmerking (7.4).

Als we nu kunnen aantonen dat $\mathcal{O}'$ de ruimte X niet overdekt, dan overdekt $\mathcal{O}$ a fortiori X niet.

3. Zij $\mathcal{O}' \subset \mathcal{T}$ als in opmerking 2, dus maximaal. Voor een element $U \in \mathcal{T}$ geldt dan:

> $U \notin \mathcal{O}' \Leftrightarrow$ er is een eindige deelcollectie $\mathcal{E}$ van $\mathcal{O}'$ zodat $\{U\} \cup \mathcal{E}$ een overdekking is van X.

Immers, $\mathcal{O}'$ is maximaal t.a.v. de eigenschappen (a) en (b). Bewijs nu zelf deze uitspraak.

4. Zij $\mathcal{O}'$ weer als in 2. Als voor $U,V \in \mathcal{T}$ geldt $U \notin \mathcal{O}'$ en $V \notin \mathcal{O}'$, dan ook $U \cap V \notin \mathcal{O}'$. Immers, volgens 3. zijn er eindige deelcollecties $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}'$ van $\mathcal{O}'$ zodat zowel $\{U\} \cup \mathcal{E}$ als $\{V\} \cup \mathcal{E}'$ overdekkingen van X zijn. Elementaire verzamelingstheorie geeft dan dat $\{U \cap V\} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{E}'$ ook een overdekking van X is. Nogmaals 3. toepassen levert dan $U \cap V \notin \mathcal{O}'$. Hieruit volgt:

> Als voor <u>eindig</u> veel elementen $U_1, U_2, \ldots, U_n$ van $\mathcal{T}$ geldt $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{O}'$, dan is er tenminste één U_j met $U_j \in \mathcal{O}'$.

We zijn nu in staat om de stellingen te bewijzen.

<u>Bewijs van stelling (7.2)</u>. Zij $\mathcal{O}$ een collectie open deelverzamelingen van X zodat geen eindige deelcollectie van $\mathcal{O}$ de ruimte X overdekt. Zij $\mathcal{O}' \supset \mathcal{O}$ maximaal zoals in (7.3)2. Beschouw dan $\mathcal{S} \cap \mathcal{O}'$. Dit is geen overdekking van X, want anders zou deze uit te dunnen zijn tot een eindige overdekking (voorwaarde aan $\mathcal{S}$ opgelegd), in strijd met de definitie van $\mathcal{O}'$. Als we nu zouden kunnen aantonen dat

$$(*) \qquad \bigcup_{Y \in \mathcal{O}'} Y \subset \bigcup_{Y \in \mathcal{S} \cap \mathcal{O}'} Y,$$

dan zijn we klaar, want dan overdekt $\mathcal{O}'$, en dus ook $\mathcal{O}$ de ruimte X niet. Welnu, zij $x \in Y \in \mathcal{O}'$. Y is open, dus er zijn eindig veel elementen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ van $\mathcal{S}$ zodat $x \in \bigcap_{i=1}^{n} S_i \subset Y$. Maar dit betekent $\bigcap_{i=1}^{n} S_i \in \mathcal{O}'$ (ga na, gebruik maximaliteit). Volgens (7.3)4. is er dus een $S \in \mathcal{S}$ met $x \in S \in \mathcal{O}'$, waarmee (*) bewezen is.

Bewijs van stelling (7.1). Als subbasis $\mathcal{S}$ voor de Tychonoff-topologie op $X = \Pi X_\gamma$ nemen we de collectie verzamelingen $\pi_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ waarbij γ de indexverzameling Γ doorloopt en U_γ de collectie open verzamelingen van X_γ doorloopt. π_γ is de projectie van X op X_γ, zie (2.15). Zij $\mathcal{O} \subset \mathcal{S}$ zodanig dat geen eindige deelcollectie van $\mathcal{O}$ de ruimte X overdekt. We tonen aan: $\mathcal{O}$ overdekt X niet. Volgens stelling (7.2) is X dan compakt. Bekijk voor iedere $\gamma \in \Gamma$ de collectie $\mathcal{U}_\gamma$ van open verzamelingen $U \subset X_\gamma$ waarvoor $\pi_\gamma^{-1}(U) \in \mathcal{O}$. Geen eindige deelcollectie van $\mathcal{U}_\gamma$ overdekt X_γ (waarom niet?). Wegens de compactheid van X_γ is dan ook $\mathcal{U}_\gamma$ geen overdekking van X_γ. Er is dus een punt $x_\gamma \in X_\gamma$ met $x_\gamma \notin U$ voor alle $U \in \mathcal{U}_\gamma$. Maar dan wordt het punt $x \in X$ met coördinaten x_γ, $\gamma \in \Gamma$ niet door $\mathcal{O}$ overdekt, dus $\mathcal{O}$ is inderdaad geen overdekking van X.

&7.4) Opmerking. De wiskundige maakt vaak gebruik van een aantal principes, die intuïtief wel duidelijk lijken, maar die bij nadere beschouwing toch opgenomen moeten worden in zijn stelsel van axioma's. Een zeer bekend voorbeeld hiervan is het principe van de volledige inductie. Andere vaak gebruikte

principes zijn het keuzeprincipe (keuze-axioma) en het maximaliteits-principe (één vorm hiervan staat bekend als het lemma van Zorn).

Keuze-axioma. Zij Γ een verzameling, en laat voor iedere $\gamma \in \Gamma$ een niet lege verzameling X_γ gegeven zijn. Dan is er een afbeelding $f: \Gamma \to \bigcup_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$, zó dat $f(\gamma) \in X_\gamma$ voor alle $\gamma \in \Gamma$.

Lemma van Zorn. Laat X een verzameling zijn, voorzien van een partiële ordening. Als iedere totaal geordende deelverzameling $M \subset X$ een supremum in X heeft, dan bezit X een maximaal element.

Alhoewel het keuze-axioma veel aannemelijker lijkt dan het lemma van Zorn, kan men toch bewijzen dat ze equivalent zijn!
Als voorbeeld laten we zien hoe het lemma van Zorn gebruikt kan worden in (7.3)1. Zij A de verzameling bestaande uit alle collecties open deelverzamelingen die voldoen aan (a) en (b). A wordt partieel geordend door de inclusierelatie. Bij ieder totaal geordend deel van A vormen we nu de vereniging. Dit is het bijbehorende supremum zoals gemakkelijk te zien is. Dus A heeft een maximaal element.

Meer informatie over het keuze-axioma en andere daarmee equivalente principes kan men bijvoorbeeld vinden in het boek "Naive Set Theory" door P.R. Halmos.

Tentamen Topologie

16 maart 1974
9.30-12.30 uur

1. $f: A \to B$ is een surjectieve afbeelding. Veronderstel dat B een topologische ruimte is, en voorzie A van de door f geïnduceerde topologie.
   (a) Bewijs: $f: A \to B$ is een open afbeelding.
   (b) Bewijs: A is samenhangend $\Leftrightarrow$ B is samenhangend.

2. $X = \{a, b\}$ met topologie $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$.
   $Y = [0,2]$ met de gewone metrische topologie.
   $X \times Y$ is voorzien van de Tychonoff-topologie en $p: X \times Y \to Y$ is de projectie op de tweede factor.
   (a) Bewijs: Een afbeelding $f: Y \to X \times Y$ is continu dan en slechts dan als $p \circ f : Y \to Y$ continu is.
   (b) We bekijken de deelverzameling A van $X \times Y$, gegeven door
   $$A = \{(a,y) \mid 0 \leq y < 1\} \cup \{(b,y) \mid 1 \leq y \leq 2\}$$
   (b1) Bepaal Int A en $\overline{A}$.
   (b2) Bewijs dat A compact is

3. (a) Geef de definitie van een topologische groep.
   (b) Beschrijf de topologie van de puntsgewijze convergentie op een funktieruimte Y^X (Geef bijvoorbeeld een subbasis, of geef nodige en voldoende voorwaarden opdat een afbeelding $Z \to Y^X$ continu is).
   (c) Zij G een topologische groep, X een topologische ruimte, $a \in G$ een vast gekozen element.
   G^X voorzien we van de topologie van de puntsgewijze convergentie.
   Definieer een afbeelding $F: G^X \to G^X$ door
   $$(F\,f)(x) = a \cdot f(x) \quad \text{voor } f \in G^X \text{ en } x \in X.$$
   Bewijs dat F een continue afbeelding is.